Prof. Dr. Armin Iske
Dr. Andreas Vollmer
M.Sc. Lars Poppe

Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg
Wintersemester 2022/23

Übungen zu Analysis 1

Aufgaben des Tages 22 — 19. Januar 2022

Aufgabe 1: *(5+2 Punkte)* Für metrische Räume $(X, d), (Y, e)$ sei $f : X \longrightarrow Y$ eine Funktion.

(a) Zeige, dass f genau dann stetig auf X ist, falls für alle offenen Mengen $O \subset Y$ das Urbild $f^{-1}(O)$ offen in X liegt.

Hinweis: Verbinde innere Punkte offener Mengen mit punktweiser Stetigkeit.

(b) Folgere aus (a), dass stetige Funktionen $f : X \longrightarrow Y$ die Kompaktheit erhalten, d.h. für alle kompakten Mengen $K \subset X$ ist auch $f(K) \subset Y$ kompakt.

Hinweis: Betrachte die Urbilder offener Überdeckungen von $f(K)$.

Aufgabe 2: *(3 Punkte)* Die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, \\ 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Zeige, dass f in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ unstetig ist.

Ausgabedatum: 19. Januar 2022 **Abgabetermin:** 23. Januar 2022, 10:00 Uhr.